

# STRUCTURES DE VALEURS ZÊTAS GÉNÉRALISÉES

## STRUCTURES OF GENERALISED ZETA VALUES

---

DIRECTEURS DE THÈSE : PIERRE CLAVIER, MARTIN BORDEMANN  
IRIMAS, 12 RUE DES FRÈRES LUMIÈRE, 68 093 MULHOUSE CEDEX  
TEL: +49(0)1792372975  
[EMAIL: PIERRE.CLAVIER@UHA.FR](mailto:PIERRE.CLAVIER@UHA.FR)

On rappelle qu'une fonction zêta multiple est une fonction à  $k$  variables  $s_1, \dots, s_k$  qui se présente comme une somme infinie paramétrée par toutes les suites strictement décroissantes de  $k$  entiers strictement positifs  $n_1 > \dots > n_k$  telle que chaque terme est égal à  $(n_1)^{-s_1} \dots (n_k)^{-s_k}$ . Ces fonctions généralisent la célèbre fonction zêta de Riemann ( $k=1$ ). Les valeurs particulières d'une fonction zêta multiple qui se produisent quand tous les arguments  $s_1, \dots, s_k$  sont des entiers strictement positifs (avec  $s_1 > 1$ ) sont appelées valeurs zêta multiples (multiple zeta values, MZV). Ces nombres réels jouent un rôle prominent en théorie des nombres actuelle, et leurs propriétés arithmétiques se reflètent dans certaines descriptions algébriques. Récemment, plusieurs généralisations aux forêts enracinées des valeurs zêtas multiples (MZVs) ont été définies et étudiées [Y,M,C]. Ces objets sont apparus dans le cadre de l'étude de posets étiquetés, mais trouvent également des applications en théorie des nombres ainsi qu'en physique mathématique (amplitudes en théorie quantique des champs et théorie des cordes). Le but premier de cette thèse sera d'exploiter des propriétés universelles d'une algèbre de graphes pour construire de nouvelles généralisations de MZVs et d'étudier leurs structures. Plus précisément, on utilisera qu'une algèbre de graphes orientés sans boucles est une PROP libre pour construire une généralisation à ces graphes des MZVs. On cherchera ensuite à exploiter plus avant cette propriété universelle pour caractériser les nombres obtenus par cette construction et leurs propriétés algébriques. Une deuxième direction de recherche sera le lien avec le célèbre associateur de Drinfel'd [D] qui est une série génératrice de MZVs. Cet associateur a beaucoup d'applications en physique mathématique, en particulier dans la théorie de quantification des (quasi)bigèbres de Lie et également dans l'approche de Kontsevich pour la quantification par déformation comme observé par D.Tamarkin. Les identités de l'associateur (pentagone et hexagone) sont des identités importantes pour les MZVs. Une interprétation de l'associateur dans le cadre des MZVs généralisées serait donc intéressante.

Mots-clefs : MZVs généralisés, PROPs de graphes, associateur de Drinfel'd.

Let us recall that a multiple zeta function is a function of  $k$  variables  $s_1, \dots, s_k$  that can be written as a infinite sum running over all strictly decreasing sequences of  $k$  positive integers  $n_1 > \dots > n_k$  and such that each term in the sum is equal to  $(n_1)^{-s_1} \dots (n_k)^{-s_k}$ . These functions generalise the Riemann's zeta function ( $k=1$ ). The specific values that a multiple zeta function takes when all its variables  $s_1, \dots, s_k$  are integers (with  $s_1 > 1$ ) are called multiple zeta values, MZVs. These real numbers play an important role in modern number theory and their arithmetic properties are reflected in some algebraic descriptions. Recently, several generalisations to rooted forests of MZVs have been defined and studied [Y,M,C]. These objects have appeared in the context of labelled posets but also have applications in number theory as well as in mathematical physics. (amplitudes in quantum field theories and string theories). The first goal of this PhD project is to use the universal property of an algebra of graphs to build new generalisations of MZVs and to study their structure. More precisely we will use that an algebra of directed acyclic graphs is a free PROP to build a generalisation to these graphs of MZVs. We will then aim to further use this algebraic property to characterise the numbers obtained by this construction as well as their algebraic properties. Another research direction will be the link with the famous Drinfeld associator [D] which is a generating series of MZVs. This associator has many applications to

mathematical physics and in particular in the theory of quantification of Lie (quasi)bialgebra and in Kontsevitch's approach to deformation quantisation, as observed by D. Tamarkin. The identities of the associator (pentagon and hexagon) are important identities for MZVs. An interpretation of the associator in the context of generalised MZVs would therefore be interesting.

Keywords : generalised MZVs, PROPs of graphs, Drinfeld associator

[C] P. Clavier; Double Shuffle relations for Arborified Zeta Values; Journal of Algebra; (543) 111-155 (2020); arXiv:1812.00777v2 [math.NT].

[D] V. Drinfeld; On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ . Leningrad Math. J. 2:4 829–860 (1990).

[M] D. Manchon; Arborified multiple zeta values; Proceedings of "New approaches to Multiple Zeta Values", ICMAT, Madrid (2013); arXiv: 1603.01498 [math.CO].

[Y] S. Yamamoto; Multiple zeta-star values and multiple integrals; arXiv: 1405.6499 [math.NT].